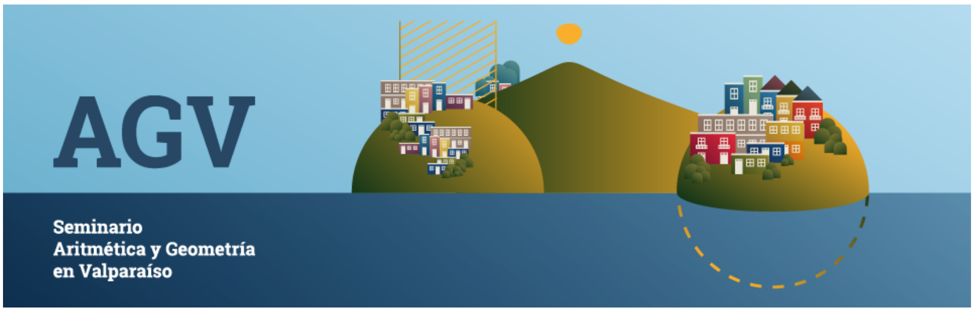


**Rubén A. Hidalgo** [1]
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
Temuco, Chile

Fecha: viernes 19 de octubre
Hora: 14.30 -16.00
Lugar: Sala Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias
Universidad de Valparaíso.

**Title**: **Dibujos de Niños**

**Abstract**: El concepto de *superficie de Riemann* aparece ya en los trabajos de B. Riemann, estas vistos como ceros de polinomios. El teorema de la función implícita permite ver que toda curva algebraica proyectiva compleja, irreducible y suave, define una superficie de Riemann compacta. Recíprocamente, el teorema de Riemann-Roch permite ver que toda superficie compacta se puede obtener, módulo isomorfismos, de tal manera. De esta manera, se obtiene una equivalencia entre las categorías de superficies de Riemann compactas (objetos analíticos), cuyos morfismos son las funciones holomorfas, y la de la curvas algebraicas proyectivas complejas, irreducibles y suaves (objetos algebraicos), cuyos morfismos son las funciones racionales.

En 1979, Belyi observó de si $S$ es una superficie de Riemann que se puede describir por una curva algebraica proyectiva compleja, irreducible y suave, definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, entonces debe existir una función meromorfa no-constante $\beta : S \to \widehat{\mathbb{C}}$, cuyos valores de ramificación están contenidos en el conjunto $\{\infty, 0, 1\}$. En tal situación $S$ es llamada una *curva de Belyi*, $\beta$ una *función de Belyi* y $(S, \beta)$ un *par de Belyi*. Por resultados de Weil, se tiene el recíproco. Se obtiene una equivalencia entre las categorías de curvas de Belyi y la de la curvas algebraicas proyectivas, irreducibles y suaves, definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Ahora, si $(S, \beta)$ es un par de Belyi, entonces en $S$ se puede construir un grafo bipartito $\mathcal{G} \subset S$: sus vértices blancos son dados por $\beta^{-1}(0)$, sus vértices negros son dados por $\beta^{-1}(1)$ y sus ejes por $\beta^{-1}((0,1))$. Tal grafo bipartito tiene la propiedad de definir un *mapa*, es decir, una

[1]FONDECYT 1150003 y Anillo ACT1415 PIA-CONICYT,
e-mail: `ruben.hidalgo@ufrontera.cl`

descomposición celular de $S$ (sus caras son las componentes conexas de $S \setminus \mathcal{G}$, cada una un disco topológico).

Grothendieck, en sus "Esquisse d'un programme" ([6]), introduce el concepto de *dessins d'enfants* (dibujos de niños), estos siendo pares $(X, \mathcal{G})$ donde, $X$ es una superficie compacta orientable y $\mathcal{G} \subset X$ un grafo bipartito que define un mapa en $X$. De esta manera, cada par de Belyi define un dibujo de niño. El teorema de uniformización de Klein-Koebe-Poincaré permite obtener el recíproco. Ahora, esto permite obtener una equivalencia entre las categorías de pares de Belyi (objetos analíticos) y la dibujos de niños (objetos combinatóricos).

Por lo anterior, se tiene una equivalencia entre las categorías de pares $(C, \beta)$, donde $C$ es una curva algebraica definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ y $\beta : C \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función racional (que es función de Belyi) también definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ y la de dibujos de niños. Luego, el grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ induce una acción natural sobre los dibujos de niños. Grothendieck se dió cuenta que tal acción es fiel para el caso de género 1, para género 0 esto fue observado luego por Schneps ([7]) y para géneros $g \geq 2$ por Girondo y González-Diez ([3]).

Una de las ideas de Grothendieck era obtener información interna del misterioso grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (que corresponde a la teoría clásica de Galois) por medio de tal acción, es decir, usar objetos combinatorios para esto.

En esta charla, de dos partes, intentaré describir los objetos anteriores, mostrar algunos invariantes Galoisianos clásicos y finalmente mostrar un nuevo invariante (Z-orientabilidad) que hemos obtenido junto a Ernesto Girondo, Gabino González-Diez y Gareth Jones [4].

## References


[1] G. V. Belyĭ. On Galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979) 267–276, 479.

[2] E. Girondo and G. González-Diez. *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*. London Mathematical Society Student Texts **79**. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[3] E. Girondo and G. González-Diez. A note on the action of the absolute Galois group on dessins. *Bull. London Math. Soc.* **39** No. 5 (2007), 721–723.

[4] E. Girondo, G. González-Diez, R. A. Hidalgo and G. Jones. Zapponi-Orientable dessins d'enfants. Preprint.

[5] G. Gonzaléz-Diez and A. Jaikin-Zapirain. The absolute Galois group acts faithfully on regular dessins and on Beauville surfaces. *Proc. London Math. Soc.* **111** No. 4 (2015), 775–796.

[6] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. Geometric Galois Actions. 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un programme. Ed. L. Schneps and P. Lochak, pp. 5–48, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **242**, Cambridge University Press (1997)

[7] L. Schneps. Dessins d'enfant on the Riemann sphere. In *The Grothendieck theory of dessins d'enfants.* Edited by Leila Schneps. *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* **200**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, 47–77.

[8] J. Wolfart. ABC for polynomials, dessins d'enfants and uniformization – a survey. Elementare und analytische Zahlentheorie, 313–345, Schr. Wiss. Ges. Johann Wolfgang Goethe Univ. Frankfurt am Main, 20, Franz Steiner Verlag Stuttgart, Stuttgart, 2006.